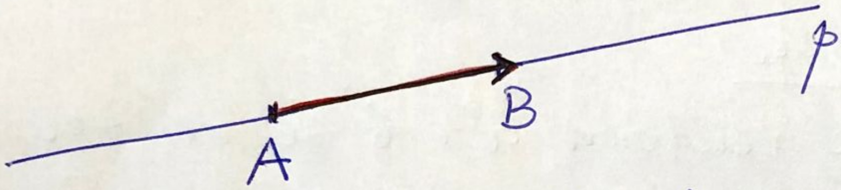
# Vektori

Vektori su se u matematici pojavili zbog potrebe da se u matematici modeliraju neke fizičke pojave za čiji opis nije dovoljan samo mjerni broj (veličina koja daje kvantitativno obilježje te pojave) već se moraju znati i neke druge bitne karakteristike te pojave. Primjer je sila i brzina.




Definicija: Vektor je orjentisana duž $\overline{AB}$, čiji je početak tacka A, a kraj tacka B.
Označavamo ga sa $\overrightarrow{AB}$.
Elementi vektora su:
a) pravac – prava koja sadrži tacke A i B,
b) smjer – od A ka B – određen strelicom koja ide od A ka B,
c) intezitet – dužina duži $\overline{AB}$. Označavamo ga sa $|\overrightarrow{AB}|$ i to je mjerni broj za vektor $\overrightarrow{AB}$.

Vektore još označavamo i sa jednim slovom, Naprimjer $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \ldots$
Vektori su jednaki ako imaju isti intezitet i smjer, a pripadaju paralelnim pravima (tj imaju paralelne pravce)
Vektor kod koga se poklapaju početak i kraj naziva se nula (ili nulti) vektor ($\overrightarrow{AA} = \vec{0}$)

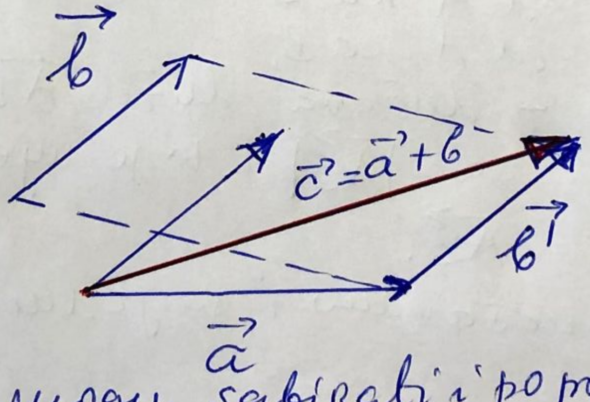
- Vektori koji pripadaju istoj pravoj nazivaju se kolinearnim vektorima.
- Vektori koji pripadaju istoj ravni u prostoru nazivaju se komplanarnim vektorima (tri ili više vektora)
- Vektor čiji je intezitet jednak 1, tj $|\vec{a}| = 1$, se naziva jediničnim vektorom ili ortom.

Osnovne operacije nad vektorima (linearne) su sabiranje vektora i množenje vektora skalarom.

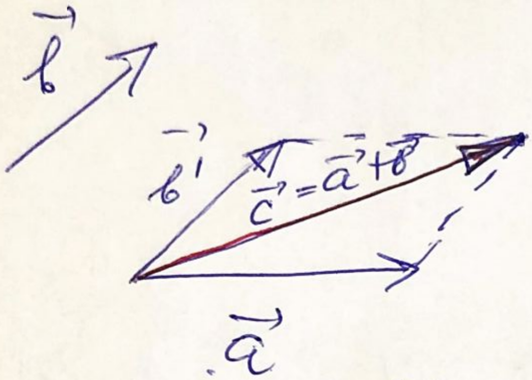
Sabiranje vektora

Definicija Zbir vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ je vektor $\vec{c}$ (oznaka $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$) koji se dobija tako što se ~~početak~~ drugi vektor translira tako da mu se početak poklopi sa krajem prvog vektora, pri čemu je početak vektora $\vec{c}$, početak prvog vektora $\vec{a}$, a kraj – kraj transliranog drugog vektora.

$\vec{b} = \vec{b'}$




Vektori se takođe mogu sabirati i po pravilu paralelograma. Vektori se translacijom dovedu da imaju zajednički početak. Nad ovim vektorima sa zajedničkim početkom se konstruiše paralelogram. Dijagonala ovog paralelograma iz zajedničkog početka je zbir ova dva vektora.




Vektor koji u zbiru sa datim vektorom $\vec a$ daje nula vektor nazivamo suprotan vektor vektoru $\vec a$ i označavamo sa $-\vec a$, tj $\vec a + (-\vec a) = \vec 0$

<u>Svojstva sabiranja vektora</u>

$$\vec a + \vec b = \vec b + \vec a$$
$$(\vec a + \vec b) + \vec c = \vec a + (\vec b + \vec c)$$
$$\vec a + (-\vec a) = \vec 0$$
$$\vec a + \vec 0 = \vec a$$

Takođe, za svaka dva vektora $\vec a$ i $\vec b$ važi nejednakost trougla:

$$|\vec a + \vec b| \le |\vec a| + |\vec b|$$

<u>Množenje vektora skalarom (brojem)</u>

$\vec a + \vec a$ označavamo sa $2 \cdot \vec a$

Slično $\vec a + \vec a + \vec a = 3\vec a = 2\vec a + \vec a$

Množenje vektora prirodnim brojem $n$ definiše se na sljedeći način: $n\vec a = \underbrace{\vec a + \vec a + \dots + \vec a}_{n\text{-puta}}$

$(-n) \cdot \vec a = -(n \cdot \vec a)$ - vektor suprotan vektoru $n\vec a$

$0 \cdot \vec a = \vec 0$.

Šta se događa kada je $\lambda \in \mathbb{R}$.

<u>Definicija</u> Množenjem vektora $\vec a$ brojem $\lambda \in R$ dobija se vektor $\lambda \vec a$, čiji je intezitet $|\lambda| |\vec a|$, koji ima isti pravac kao vektor $\vec a$, a čiji smjer zavisi od znaka broja $\lambda$:

- ako je $\lambda > 0$ smjer $\lambda \vec a$ se poklapa sa smjerom $\vec a$
- ako je $\lambda < 0$ smjer $\lambda \vec a$ je suprotan smjeru $\vec a$.

## Svojstva množenja vektora skalarom

$$\alpha(\beta\vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a}$$

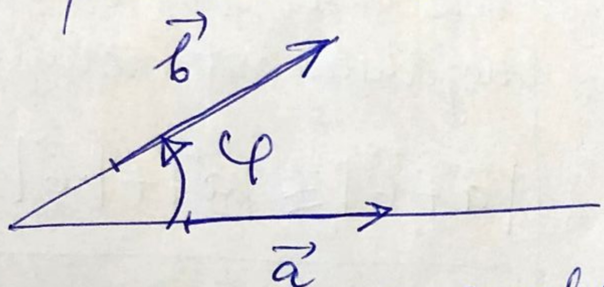
$$\alpha(\vec{a}+\vec{b}) = \alpha\vec{a}+\alpha\vec{b}$$

$$(\alpha+\beta)\vec{a} = \alpha\vec{a}+\beta\vec{a}$$

$$1\cdot\vec{a} = \vec{a}$$

## Ugao između vektora

Definicija Uglom između vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ nazivamo ugao koji zaklapaju njihovi pravci koji polaze iz jedne tacke




$$\varphi = \measuredangle(\vec{a},\vec{b})$$

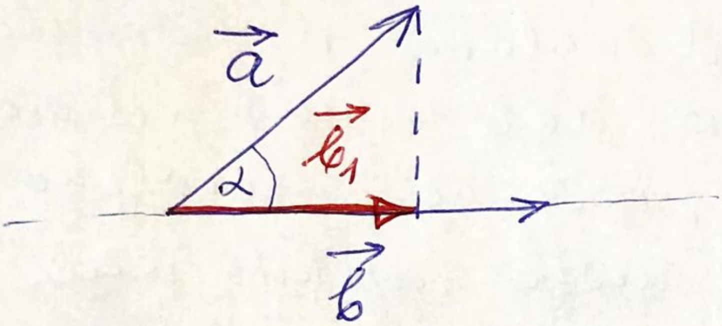
Dva vektora su normalna (ortogonalna) ako je $\measuredangle(\vec{a},\vec{b}) = \frac{\pi}{2}$

## Projekcija vektora na vektor

Definicija

Vektorska (ili ortogonalna) projekcija vektora $\vec{a}$ na vektor $\vec{b}$ je vektor $\vec{b}_1$, čiji je početak ortogonalna projekcija početka vektora $\vec{a}$ na vektor $\vec{b}$, a kraj ortogonalna projekcija kraja vektora $\vec{a}$ na vektor $\vec{b}$

Projekciju označavamo sa $Pr_{\vec{b}}\vec{a} = \vec{b}_1$




<u>Definicija</u> Algebarska (skalarna) projekcija vektora $\vec{a}$ na vektor $\vec{b}$ je broj $\pm|\vec{b}_1|$, gdje je $\vec{b}_1$ vektorska projekcija vektora $\vec{a}$ na vektor $\vec{b}$. Veličina $\pm|\vec{b}_1|$ se uzima sa znakom $+$, ako je smjer vektora $\vec{b}_1$ isti kao i smjer vektora $\vec{b}$, a sa znakom $-$, ako je smjer vektora $\vec{b}_1$ suprotan smjeru vektora $\vec{b}$. Označava se sa

$$pr_{\vec{a}}\vec{b} = \pm|\vec{b}_1|$$

<u>Teorema</u>

$$pr_{\vec{b}}\vec{a} = |\vec{a}|\cos\angle(\vec{a},\vec{b})$$

<u>Teorema</u> a) Projekcija zbira vektora na isti vektor jednaka je zbiru projekcija:

$$Pr_{\vec{c}}(\vec{a}+\vec{b}) = Pr_{\vec{c}}\vec{a} + Pr_{\vec{c}}\vec{b} \quad / \quad pr_{\vec{c}}(\vec{a}+\vec{b}) = pr_{\vec{c}}\vec{a} + pr_{\vec{c}}\vec{b}$$

b) Projekcija proizvoda skalara i vektora na drugi vektor jednaka je proizvodu tog skalara i projekciji vektora na osu

$$Pr_{\vec{b}}(\lambda\vec{a}) = \lambda\, Pr_{\vec{b}}\vec{a} \quad / \quad pr_{\vec{b}}(\lambda\vec{a}) = \lambda\, pr_{\vec{b}}\vec{a}$$

# Vektori u ravni i prostoru

Jasno je da se svaki vektor sa prave može zapisati kao proizvod skalara i datog vektora sa prave. Na primjer, ako imamo jedinični vektor $\vec{p_0}$ sa prave $p$, tada se proizvoljni vektor $\vec{a}$ sa prave može zapisati kao

$$\vec{a} = \pm|\vec{a}|\,\vec{p_0}$$

znak + je ako $\vec{p_0}$ i $\vec{a}$ imaju isti smjer, a − ako su suprotnog smjera.

Rekli smo da su dva ili više vektora koji pripadaju istoj pravoj kolinearni vektori. Znači, važi sljedeća teorema:

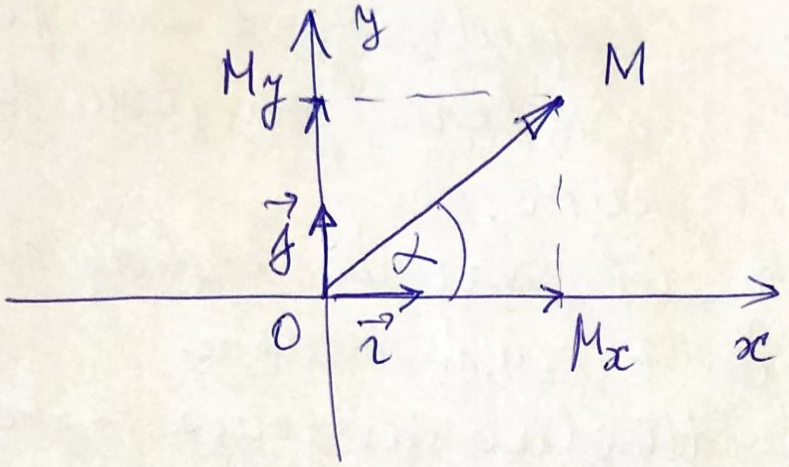
<u>Teorema</u> Vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su kolinearni ako i samo ako postoji $\lambda \in \mathbb{R}$ takav da je

$$\vec{a} = \lambda\,\vec{b}.$$

Razmotrimo sada vektore u ravni.

Svaka dva nekolinearna vektora u ravni čine bazu ~~tog~~ te ravni, odnosno bilo koji vektor u ravni može biti izražen preko bilo koja dva nekolinearna vektora sa ravni.

Uzmimo pravougli sistem. Na $x$-osi uzmimo jedinični vektor i označimo ga sa $\vec{i}$, a na $y$ osi jedinični vektor i označimo ga sa $\vec{j}$.



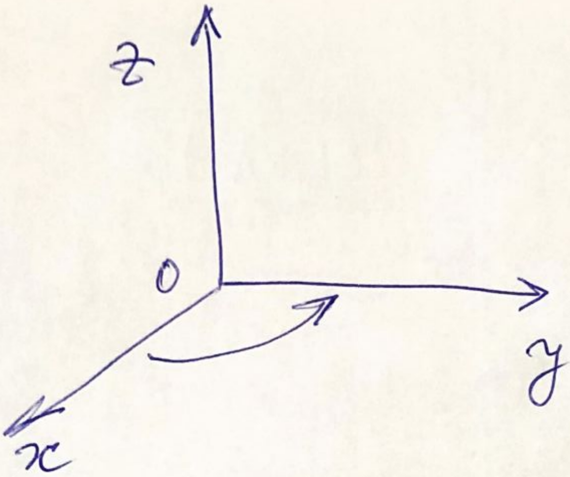

SLIKA 1

Uzmimo bilo koju tacku M iz ravni. Projektujmo tacku M na x-osu i na y-osu i neka su $M_x$ i $M_y$ te projekcije. Neka je dužina vektora $\vec{OM_x}$ jednaka x a dužina vektora $\vec{OM_y}$ jednaka y. Spojimo, koordinatni početak O i tacku M. Vektor $\vec{OM}$ se naziva radijus vektorom tacke M ili vektorom položaja tacke M. Jasno je da su $\vec{OM_x}$ i $\vec{OM_y}$ vektorske projekcije vektora $\vec{OM}$ na x, odnosno y osu. Algebarske projekcije radijus vektora $\vec{OM}$ na koordinatne ose nazivaju se koordinatama tacke M, tj $M(x,y)$.

Takođe važi, $\vec{OM} = \vec{OM_x} + \vec{M_xM} = x\vec{i} + y\cdot\vec{j} = (x,y)$

Znači, svakoj tački u ravni odgovara uređeni par brojeva, i obrnuto svakom uređenom paru brojeva odgovara ~~uređeni~~ jedinstvena tačka M u ravni (odnosno, krajnja tačka radijus vektora)

Uzmimo u prostoru tačku O (koordinatni početak) i tri prave koje prolaze kroz tu tačku koje su normalne ~~sa~~ međusobno i označimo ih sa x, y i z-osom.




Orjentacija z-ose je određena pravilom desne ruke.
Obuhvatimo desnom rukom z-osu. ~~u pravcu~~
Ukoliko savijemo prste desne ruke oko z-ose za 90° u pravcu suprotnom od kretanja kazaljke na satu od pozitivnog djela x-ose ka pozitivnom djelu y-ose, onda će palac desne ruke pokazivati smjer z-ose

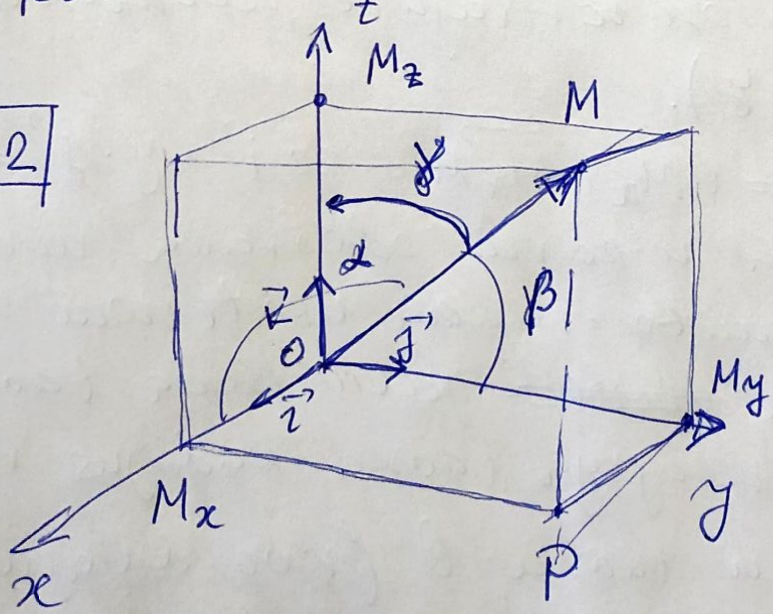
Uzmimo na osama x, y i z jedinične vektore $\vec{i}, \vec{j}$ i $\vec{k}$ respektivno. Jasno je da su ova tri vektora (nekomplanarna), tj da ne pripadaju istoj ravni.

$$|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$$

$$\angle(\vec{i}, \vec{j}) = \angle(\vec{i}, \vec{k}) = \angle(\vec{j}, \vec{k}) = \frac{\pi}{2}$$

$$\vec{OM_x} = x \cdot \vec{i}$$
$$\vec{OM_y} = y\vec{j}$$
$$\vec{OM_z} = z\vec{k}$$

SLIKA 2




$$\vec{OM} = \vec{OM_x} + \vec{M_xP} + \vec{PM} = \vec{OM_x} + \vec{OM_y} + \vec{OM_z} =$$
$$= x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = (x, y, z)$$

Jasno je šta su koordinate radijus vektora u prostoru, kao i to da su one jedinstvene.

Vratimo se sada na ravan. (SLIKA 2)
Pretpostavimo da je poznat ugao $\alpha$ koji vektor $\vec{OM}$ zaklapa sa pozitivnim dijelom ~~x~~ x-ose (tj. sa vektorom $\vec{i}$).

Tada je $x = |\vec{OM}|\cos\alpha$

$y = |\vec{OM}|\sin\alpha$

Odavde slijedi da je $\vec{OM} = \sqrt{x^2+y^2}$.

Slično i za prostor. Neka su $\alpha, \beta$ i $\gamma$ uglovi koje radijus vektor $\vec{OM}$ zaklapa sa koordinatnim osama. Tada je

$$x = |\vec{OM}|\cos\alpha, \quad y = |\vec{OM}|\cos\beta, \quad z = |\vec{OM}|\cos\gamma$$

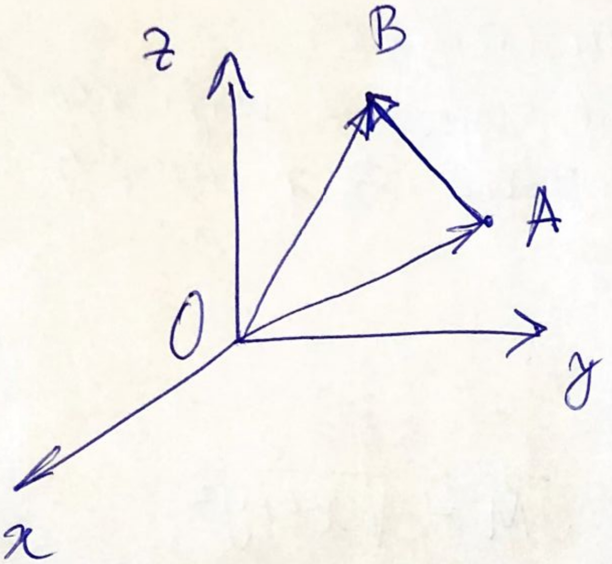
Odavde, $|\vec{OM}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Ako je $|\vec{OM}| = 1$, onda su koordinate jediničnog vektora:

a) u ravni $(\cos\alpha, \sin\alpha)$

b) u prostoru $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$.

Postavlja se pitanje: Šta ako je vektor u prostoru zadat sa dvije tačke u prostoru $A(x_1, y_1, z_1)$ i $B(x_2, y_2, z_2)$, koje su njegove koordinate (odnosno koordinate radijus vektora koji odgovara vektoru $\vec{AB}$)?




$A(x_1, y_1, z_1)$

$B(x_2, y_2, z_2)$

Povucemo iz tacke O, radijus vektore tačaka A i B

Jasno je da je $\vec{OA} + \vec{AB} = \vec{OB}$, odnosno

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$$

Odavde, pošto je $\vec{OB} = (x_2, y_2, z_2)$, $\vec{OA} = (x_1, y_1, z_1)$

vektor $\vec{AB}$ ima koordinate:

$$\vec{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

Dužina vektora $\vec{AB}$ (intenzitet) ili rastojanje izme-
đu tačaka A i B je jednako:

$$\vec{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$